

# EKSPLORASI KONSTRUKSI PENGETAHUAN MATEMATIKA SISWA KELAS VIII SMP NEGERI 1 SURAKARTA MENGGUNAKAN TEORI *ACTION, PROCESS,* *OBJECT, SCHEME* (APOS) PADA MATERI POKOK FAKTORISASI BENTUK ALJABAR

Muh. Zuhair Zahid<sup>1</sup>, Imam Sujadi<sup>2</sup>, Dewi Retno Sari S<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Prodi Magister Pendidikan Matematika, PPs Universitas Sebelas Maret Surakarta

**Abstract:** The objective of the this qualitative research was to describe and analyze the mathematical construction process of eighth graders of SMPN 1 Surakarta in the algebraic factoring topic based on the APOS Theory. The subjects of the research were the eighth graders of SMPN 1 Surakarta and have been selected by using purposive sampling with the following criteria: (1) the students have learning algebraic factoring before; (2) the students were able to communicate his thoughts orally and written; and (3) each students were in high, medium, and low ability group. Data retrieved with the think aloud method and taken by the researcher himself, assisted by two auxiliary instruments; algebraic factoring test and interview guides. The main data sources were the words and actions of students when they were being interview. Data was validated by using data triangulation, where data collection was conducted at two different times. Based on the findings and discussions, it can be concluded as follows. (1) In *action* stage, the students presented their knowledge orally, by using pictures, and in writing form. The students then subtracted the simple algebraic form by classifying the algebraic terms which have the same variables. In *process* stage, the students multiplied the binomial with FOIL method and classified the algebraic terms that have same variables mentally and in the written form. In *object* stage, the students factorized the trinomial procedurally. In *schema* stage, the subject explained that the factor when multiplied by another factor will produce the factored trinomial and linked the *action*, *process*, and *object* stage to formed a complete concept of algebraic factoring. (2) In *process* stage, there was a student who made mistakes that could be classified as 'invalid or incompatible distribution'. In *object* stage, there was a student who did factorization in non-procedural way.

**Keywords:** construction of mathematical knowledge, APOS theory, algebraic factoring

## PENDAHULUAN

Penguasaan dasar-dasar aljabar untuk digunakan dalam memahami konsep matematika yang lain sangatlah penting. Tanpa aljabar, manusia akan mengalami kesulitan ketika melakukan operasi dengan bilangan yang sangat besar. Dengan aljabar, bilangan yang akan dioperasikan digantikan dengan simbol tertentu sehingga lebih mudah dioperasikan (Boole, 2004:2). Pentingnya keberadaan aljabar membuat aspek aljabar masuk dalam materi matematika yang harus dipelajari di tingkat SMP yang dijabarkan dalam Standar Kompetensi Lulusan (SKL) “memahami konsep aljabar meliputi: bentuk aljabar dan unsur-unsurnya, persamaan dan pertidaksamaan linear serta penyelesaiannya,

himpunan dan operasinya, relasi, fungsi dan grafiknya, sistem persamaan linear dan penyelesaiannya, serta menggunakannya dalam pemecahan masalah” (BSNP, 2006:143, Permendiknas no. 23 tahun 2006). Persentase keberhasilan siswa dalam menjawab soal terkait SKL aljabar pada Ujian Akhir Nasional tahun 2012 mencapai 76,46%. Namun tingginya penguasaan SKL tersebut berbanding terbalik dengan temuan *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMMS) bahwa persentase subjek dari Indonesia yang menyelesaikan soal-soal standar TIMSS dalam domain aljabar dengan benar hanya sebesar 22% (Mullis, *et al.*, 2012:459-463).

Rendahnya kemampuan menyelesaikan soal tersebut tidak lepas dari penguasaan materi aljabar seseorang yang secara langsung terhubung dengan konstruksi pengetahuan aljabar yang dibentuk oleh seseorang. Salah satu aliran psikologi yang menjelaskan proses pembentukan pengetahuan, adalah konstruktivisme. Konstruktivisme adalah sebuah aliran filsafat pengetahuan yang bersifat personal, dimana seseorang diyakini mengonstruksi makna melalui interaksi dengan orang lain (Arends, 2008: 11).

Dalam pembahasan mengenai konstruksi pengetahuan oleh individu, dikenal sebuah teori, yakni epistemologi genetik Piaget. Menurut Piaget, dalam pikiran individu ada struktur pengetahuan awal (skemata). Melalui kontak dengan pengalaman baru, skema dapat dikembangkan dan diubah melalui asimilasi dan akomodasi. Asimilasi adalah penyesuaian struktur kognitif dengan lingkungan fisik dan akomodasi adalah proses yang menghasilkan mekanisme untuk perkembangan intelektual. Dalam perkembangan pengetahuan individu, diperlukan keseimbangan antara asimilasi dan akomodasi yang disebut *equilibrium*, sementara keadaan tidak seimbang antara asimilasi dan akomodasi disebut *disequilibrium*. Proses dari *disequilibrium* menuju *equilibrium* membuat seseorang dapat menyatukan pengalaman luar dengan skemanya (Suparno, 2001:19-24; Suparno, 1997:30-33; Hergenhann & Olson, 2009:313-315).

Dalam teori Piaget, siswa kelas VIII SMP (yang telah mempelajari konsep bentuk aljabar, persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel di kelas VII) akan menggunakan skemata awal yang telah ia pelajari tersebut untuk membangun konsep relasi, fungsi, dan persamaan garis lurus, serta sistem persamaan linear dua variabel sebagai skemata baru di kelas VIII. Dalam proses tersebut bisa terjadi asimilasi dan akomodasi sebagai proses terbentuknya skema siswa tentang persamaan linear dua variabel.

Teori epistemologi genetik Piaget kemudian dikembangkan secara spesifik oleh Dubinsky dalam dunia pembelajaran matematika dan disebut teori APOS (*Action*,

*Process, Object, Scheme*). Teori tersebut meyakini bahwa pengetahuan matematika seseorang terbagi dalam 4 tahap; aksi-proses-objek-skema (Dubinsky & McDonald, 2001:275-282). Dengan menggunakan kerangka teori APOS, Brown *et al.* (1997) berhasil mendeskripsikan bagaimana proses pembentukan skema grup, subgrup, dan operasi biner dari 31 subjek. Brown mendeskripsikan bagaimana skema terbentuk, mulai dari munculnya respon paling sederhana terhadap soal yang diberikan, respon subjek yang hanya memberikan contoh spesifik ketika diminta menyampaikan definisi sebuah konsep, sampai keberadaan subjek yang menunjukkan skema yang matang dalam materi grup, subgrup, dan operasi biner.

Asiala *et al.* (1997) juga menggunakan kerangka teori APOS untuk mendeskripsikan konstruksi mental pada konsep koset, normalitas, dan grup kosien/grup faktor. Ia memaparkan bagaimana skema-skema tersebut terbentuk, mulai dari kesulitan seorang subjek ketika harus melakukan perhitungan secara mental tanpa menuliskan secara langsung, subjek yang kesulitan melakukan manipulasi terhadap koset tanpa harus melakukan rekonstruksi konsep koset, sampai pada keberadaan subjek yang menunjukkan skema yang matang dalam materi tersebut. Di sisi lain, Tziritas (2011) menyarankan perubahan dalam siklus ACE (*Action-Discussion-Exercise*) yang muncul dalam teori APOS dan dekomposisi genetik, karena dianggapnya tidak mampu menjelaskan konstruksi konsep yang ia sebut GD1, GD2, GD3, dan GD4.

Beberapa penelitian terkait teori APOS di Indonesia mencoba mendeskripsikan seberapa jauh tingkat pemahaman siswa terhadap konsep matematis tertentu. Agustini (2007) mendeskripsikan *tingkat* pemahaman siswa pada materi himpunan pada siswa kelas I SMP Negeri I Karangrejo Tulungagung. Didapat hasil bahwa pemahaman siswa SMP Negeri I Karangrejo Tulungagung tentang himpunan berada pada tahap proses. Maryono (2008) mendeskripsikan *tingkat* pemahaman mahasiswa mengenai keterbagian bilangan dan menunjukkan bahwa tingkat pemahaman mahasiswa mengenai keterbagian bilangan bulat secara umum berada pada tahap objek. Penelitian lain oleh Mulyono (2010) menyimpulkan bahwa perkembangan skema konsep grafik fungsi mahasiswa yang bergaya kognitif *Field Dependent* mengalami kesulitan dalam menginterkoneksi aksi, proses, dan objek yang terlihat dari kesulitannya dalam menggunakan sifat-sifat fungsi seperti kemonotonan, kecekungan, dan asimtot.

Dari hasil-hasil penelitian tersebut, disimpulkan bahwa teori APOS mampu mendeskripsikan bagaimana pengetahuan matematika terbentuk dalam diri seseorang, dan selanjutnya dapat digunakan untuk melihat apakah seorang individu sudah sampai pada

tahap tertentu ataukah belum. Secara teknis, penggunaan analisis tersebut ialah peneliti membandingkan keberhasilan atau kegagalan siswa pada saat mengerjakan masalah matematika dengan konstruksi mental spesifik. Jika ada dua subjek yang sampai ke sebuah konsep matematika dan kemudian salah satu subjek dapat mengambil langkah lebih lanjut sementara yang lain tidak bisa melanjutkan, peneliti dapat mencoba untuk menjelaskan perbedaan siswa tadi dengan menunjuk konstruksi mental aksi, proses, objek dan / atau skema dari masing-masing siswa, apakah titik konstruksi tertentu sudah tercapai, ataukah belum (Dubinsky & McDonald, 2001:277).

Pentingnya penguasaan materi faktorisasi bentuk aljabar, fakta bahwa penguasaan materi aljabar siswa di Indonesia yang masih rendah, serta teori bahwa pengetahuan dikonstruksi sendiri oleh siswa menarik minat peneliti untuk meneliti konstruksi pengetahuan faktorisasi bentuk aljabar berdasarkan teori APOS pada siswa kelas VIII SMP.

Ketertarikan tersebut mendorong peneliti untuk melakukan prasurvei, dengan memberikan soal terkait teori APOS kepada dua orang siswa, masing-masing dari SMP swasta yang memiliki rating sedang dan SMP Negeri yang memiliki rating tinggi. Didapatkan hasil bahwa siswa yang berasal dari SMP yang memiliki rating sedang hanya sampai pada tahap proses, sementara siswa yang berasal dari SMP yang memiliki rating tinggi berhasil sampai pada tahap skema. Dikarenakan eksplorasi mengenai konstruksi pengetahuan siswa akan bisa maksimal jika masing-masing empat tahap teori APOS dicapai oleh siswa, maka dipilih SMPN 1 Surakarta, salah satu SMP yang mendapat predikat “A” terkait nilai UAN matematika yang diraih siswanya.

Berdasarkan ketertarikan peneliti terhadap konstruksi pengetahuan faktorisasi bentuk aljabar berdasarkan teori APOS serta hasil prasurvei yang telah disebutkan, maka dilakukan penelitian yang bertujuan mendeskripsikan dan menganalisis proses konstruksi pengetahuan siswa kelas VIII SMP Negeri 1 Surakarta pada materi pokok faktorisasi bentuk aljabar berdasarkan teori APOS.

## **METODE PENELITIAN**

Penelitian ini dilaksanakan di SMP Negeri 1 Surakarta pada semester ganjil tahun ajaran 2013/2014. Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif berjenis studi kasus. Pengumpulan data dilakukan dengan *Think aloud Method*, di mana peneliti memberikan masalah kepada siswa untuk diselesaikan di hadapan peneliti, dan dalam proses menyelesaikan masalah tersebut siswa mengungkapkan apa yang sedang mereka

pikirkan. Proses ini direkam dengan alat perekam berupa DVR (*Digital Voice Recorder*) dan telepon genggam yang memiliki fitur perekam video.

Subjek penelitian ini adalah siswa kelas VIII SMPN 1 Surakarta. Teknik *sampling* yang dipakai adalah *purposive sampling*. Proses pemilihan subjek dilakukan dengan ditetapkannya kriteria pemilihan subjek. Kriteria tersebut adalah (1) siswa telah mendapatkan pembelajaran faktorisasi bentuk aljabar; (2) siswa dimungkinkan mampu mengomunikasikan pemikirannya secara lisan maupun tulisan dengan baik; dan (3) masing-masing siswa berada pada kelompok tinggi, sedang dan rendah.

Kriteria pertama dipenuhi oleh seluruh siswa kelas VIII, dibuktikan dengan nilai ulangan materi faktorisasi bentuk aljabar yang telah dimiliki masing-masing siswa. Sementara untuk mendapatkan kriteria kedua, dilakukan klasifikasi siswa menjadi 3 kelompok kemampuan (tinggi, sedang, dan rendah) dengan cara sebagai berikut. (1) Dihitung rata-rata ( $\mu$ ) dan standar deviasi ( $\sigma$ ) dari nilai ulangan materi faktorisasi bentuk aljabar siswa. (2) Nilai siswa dikategorikan dalam tiga kelompok dengan kriteria (a) nilai ( $x$ ) termasuk kriteria tinggi jika  $x > \mu + 0,5\sigma$ , (b) nilai ( $x$ ) termasuk kriteria sedang jika  $0,5\sigma \leq x \leq \mu + 0,5\sigma$ , dan (c) nilai ( $x$ ) termasuk kriteria rendah jika  $x < \mu - 0,5\sigma$ .

Untuk mendapatkan subjek dengan kategori ketiga, dilakukan diskusi bersama guru dengan guru diminta menyediakan 2 siswa dari masing-masing kategori kemampuan rendah, sedang, dan tinggi yang mampu mengungkapkan pendapatnya secara lisan dan tertulis.

Data yang dicari dalam penelitian ini adalah proses konstruksi pengetahuan siswa. Instrumen utama dalam penelitian ini adalah peneliti sendiri, dengan dibantu dengan dua buah instrumen bantu, yakni tes faktorisasi bentuk aljabar dan panduan wawancara. Sumber data utama adalah kata-kata dan tindakan siswa ketika wawancara dengan penulis, yang direkam dengan alat perekam beserta catatan lapangan yang disusun oleh peneliti. Sumber data tambahan adalah hasil pekerjaan siswa ketika mengerjakan soal yang diberikan oleh peneliti.

Validasi data dalam penelitian ini menggunakan triangulasi data dimana hasil data yang diperoleh melalui *think aloud* dibandingkan dengan *think aloud* di waktu lain untuk melihat keajegannya. Analisis data yang digunakan dalam penelitian ini menempuh cara: (1) membuat transkrip data verbal dari hasil rekaman, (2) menelaah seluruh data dari sumber yaitu hasil *think aloud*, catatan lapangan, dan hasil pekerjaan subjek, (3) melakukan reduksi data, (4) menyusun satuan-satuan analisis data dan melakukan

pengkodean, (5) menganalisis dan menggambarkan proses konstruksi pengetahuan siswa berdasarkan teori APOS, (6) melakukan penafsiran data, (7) kesimpulan ditarik dan diverifikasi dari data yang terkumpul, (8) melakukan triangulasi, (9) melakukan analisis temuan-temuan lain, dan (10) menulis hasil penelitian.

## HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

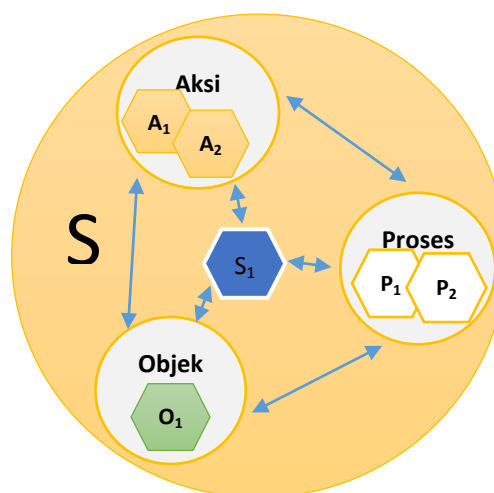
Setelah berdiskusi dengan guru, akhirnya didapatkan 6 orang subjek yang memenuhi kriteria pemilihan subjek. Daftar subjek yang terpilih disajikan dalam Tabel 1.

**Tabel 1. Nama Subjek Penelitian**

No	Inisial	Kelas	Gender	Tingkat Kemampuan
1	A	VIII A	L	Rendah
2	B	VIII B	P	Rendah
3	D	VIII D	P	Sedang
4	F	VIII F	P	Sedang
5	L	VIII A	L	Tinggi
6	G	VIII G	P	Tinggi



### Temuan Utama

Masing-masing subjek menempati tahap aksi, proses, objek, dan skema dengan karakteristik yang berbeda. Subjek mengaitkan aksi, proses, dan objek yang ia miliki untuk membentuk skema faktorisasi bentuk aljabar yang kemudian dikaitkan dengan skema bangun datar yang ia dapatkan di kelas VII. Skema yang dihasilkan disajikan dalam Gambar 1.



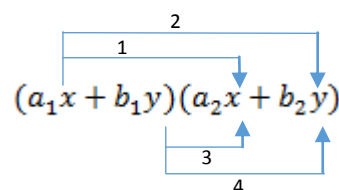
**Gambar 1. Jaringan skema faktorisasi bentuk aljabar subjek**

### Keterangan:

$A_1$ : menentukan hal apa saja yang diketahui dalam soal	$P_2$ : melakukan perkalian bentuk aljabar antarsuku dua	 : dilakukan dengan sempurna
$A_2$ : menjumlahkan bentuk aljabar sederhana	$O_1$ : melakukan faktorisasi bentuk aljabar	 : dilakukan dengan tidak sempurna
$P_1$ : menjumlahkan bentuk trinomial dengan benar	$S_1$ : skema persegi	

Pada tahap aksi, subjek menyebutkan apa yang ia ketahui dari soal dengan cara yang berbeda-beda; yakni dengan menggunakan gambar, ataupun menggunakan kata-kata yang ia tuliskan pada lembar jawab. Ini sesuai ungkapan dari Shadiq & Widyaiswara (2004:11) bahwa ungkapan mengenai hal yang diketahui siswa dari soal dapat dituangkan dalam bentuk gambar, diagram, tabel, ataupun menuangkannya dalam klimat yang menjadi inti atau saripati dari soal tersebut. Selain itu, subjek pada tahap ini melakukan operasi pengurangan pada bentuk aljabar sederhana. Pada tahap ini subjek melakukan operasi dengan tepat, yakni mengurangi koefisien dari sebuah variabel dari koefisien dari variabel yang sama. Kemampuan ini selanjutnya dipakai oleh subjek dalam melakukan perkalian bentuk suku dua aljabar dan penjumlahan bentuk trinomial.

Pada tahap proses, subjek melakukan perkalian bentuk suku dua aljabar dengan tepat. Pada bentuk  $(a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)$ , subjek mengalikan  $a_1x$  dengan  $a_2x$  dan  $b_2y$  serta  $b_1y$  dengan  $a_2x$  dan  $b_2y$ , seperti terlihat di pada Gambar 2.



Gambar 2. Alur perkalian yang dilakukan oleh subjek

### Keterangan:

1 : F ( <i>First</i> / suku pertama dari masing-masing binomial dikalikan)	3 : I ( <i>Inner</i> / suku dalam dari masing-masing binomial dikalikan)
2 : O ( <i>Outer</i> / suku luar dari masing-masing binomial dikalikan)	4 : L ( <i>Last</i> / suku terakhir dari masing-masing binomial dikalikan)

Metode perkalian ini disebut metode FOIL (*First, Outer, Inner, Last*), dimana untuk kedua buah binomial yang dikalikan, suku pertama dikalikan dengan suku pertama (*first*), suku luar dikalikan dengan suku luar (*outer*), suku dalam dikalikan dengan suku dalam (*inner*), dan suku terakhir dikalikan dengan suku terakhir (*last*) (Chambers dalam Setiawan & Widdiharto, 2009:17). Sifat yang digunakan saat melakukan perkalian aljabar

ini adalah sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan. Keempat hasil perkalian dikelompokkan berdasarkan kesamaan variabel ( $x^2$  dengan  $x^2$ ,  $xy$  dengan  $xy$ , dan  $y^2$  dengan  $y^2$ ) untuk selanjutnya dijumlahkan.

Dalam melakukan penjumlahan dari hasil perkalian tersebut, subjek L, G, B, dan A melakukan pengelompokan suku yang bervariasi sama secara mental. Dalam melakukan penjumlahan bentuk trinomial, empat subjek tersebut juga melakukan pengelompokan suku bervariasi sama secara mental. Ini sesuai dengan yang dikemukakan Asiala *et al.*, (1996:7), bahwa seseorang dikatakan mengalami tahapan proses jika ia dapat merefleksikan, menjelaskan, atau bahkan membalikkan langkah-langkah dari transformasi pada objek yang sebelumnya dipelajari tanpa benar-benar melakukan langkah-langkah tersebut. Di sisi lain, subjek D dan F melakukan pengelompokan suku yang bervariasi sama secara tertulis di lembar jawabnya. Hal ini sesuai yang dengan hasil temuan Asiala *et al.* (1997:251) yang menyebutkan bahwa terdapat subjek yang mengalami kesulitan ketika harus melakukan perhitungan secara mental tanpa menuliskan secara langsung.

Jika dilihat lebih seksama, empat orang yang melakukan pengelompokan secara mental memiliki kategori kemampuan yang berbeda-beda. Subjek L dan G berkemampuan tinggi, sementara subjek B dan A memiliki kemampuan rendah, sementara subjek D dan F yang melakukan pengelompokan secara tertulis berada dalam kategori kemampuan sedang. Nampak bahwa subjek yang memiliki tingkat kemampuan berbeda belum tentu melewati tahap proses dengan cara berbeda pula. Terlihat pula bahwa subjek berkemampuan rendah lebih baik dalam melalui tahap proses dibandingkan dengan subjek berkemampuan sedang. Ini berarti kemampuan yang lebih tinggi tidak menjamin seorang siswa menjalani tahap proses dengan lebih baik.

Selanjutnya, berdasarkan langkah-langkah yang dilakukan subjek dalam melakukan faktorisasi bentuk aljabar, didapatkan bahwa alur berpikir siswa kelas VIII dalam melakukan faktorisasi bentuk aljabar adalah (1) subjek mengalikan  $a$  dengan  $c$ , (2) subjek mengidentifikasi seluruh faktor dari  $ac$ , (3) subjek mencari dua faktor dari  $ac$  yang jika dijumlahkan akan menghasilkan  $b$ , (4) subjek “memecah”  $bxy$  menjadi  $b_1xy + b_2xy$  dan mengubah bentuk aljabar menjadi  $ax^2 + b_1xy + b_2xy + cy^2$  (5) subjek memberlakukan sifat distribusi perkalian pada penjumlahan pada  $(ax^2 + b_1xy)$  dan  $(b_2x + cy^2)$ , didapatkan  $px\left(\frac{a}{p}x + \frac{b_1}{p}y\right)$  dan  $qy\left(\frac{b_2}{q}x + \frac{c}{q}y\right)$ , (6) subjek memeriksa



apakah  $\frac{a}{p} = \frac{b_2}{q}$  dan  $\frac{b_1}{p} = \frac{c}{q}$ , (7) subjek menerapkan sifat distributif perkalian pada penjumlahan, sehingga didapatkan  $(px + qy) \left( \frac{a}{p}x + \frac{b_1}{p}y \right)$  atau  $(px + qy) \left( \frac{b_2}{q}x + \frac{c}{q}y \right)$  sebagai faktor yang dicari.

Pada tahap objek ini, subjek mengaitkan, membalikkan, dan mengurai proses yang ia miliki (dalam hal perkalian aljabar). Faktorisasi bentuk aljabar sendiri merupakan prosedur yang mengandung konsep distributif perkalian. Pada tahap inilah siswa membalik prosedur, dengan mengurai hasil perkalian dari dua buah bentuk binomial menjadi dua binomial itu sendiri. Langkah-langkah yang digunakan oleh subjek tersebut disebut metode AC (*AC-method*) (Department of Mathematics, 2011:413-414) atau “cara prosedural” (Setiawan & Widdiharto, 2009:22; Rahardjo, 2006:34). Cara ini juga dianggap oleh Rahardjo (2006:34) sebagai cara yang “benar berdasarkan aturan matematika” dan dianjurkan untuk diajarkan oleh guru pada siswa dalam menyelesaikan masalah faktorisasi bentuk aljabar. Cara prosedural tersebut secara matematis dijabarkan sebagai berikut.

Bentuk  $ax^2 + bxy + cy^2$  memiliki maksimal 2 buah akar, sehingga banyak faktor maksimal yang dimiliki ada 2. Misal faktor tersebut adalah  $(px + qy)$  dan  $(rx + sy)$ , sehingga didapat

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= (px + qy)(rx + sy) \\ &= prx^2 + (psxy + qrxy) + qsy^2 \\ &= prx^2 + (ps + qr)xy + qsy^2 \end{aligned}$$

Terlihat bahwa  $ax^2 + bxy + cy^2 = prx^2 + (ps + qr)xy + qsy^2$ . Bisa dianalogikan bahwa  $a = pr$ ,  $b = ps + qr$ , dan  $c = qs$ . Koefisien  $b$  adalah hasil penjumlahan dari  $ps$  dan  $qr$ , sementara hasil kali  $a$  dengan  $c$  akan menghasilkan  $prqs$ . Dengan mencari faktor dari  $ac$  yang jika dijumlahkan sama dengan  $b$ , maka  $bxy$  akan dapat ditulis sebagai hasil penjumlahan dua buah suku. Selanjutnya empat buah suku yang muncul dipandang sebagai hasil perkalian metode FOIL, sehingga dapat digunakan sifat distribusi perkalian terhadap penjumlahan untuk mendapatkan dua buah faktor yang dicari.

Pada tahap skema, subjek menjelaskan bahwa faktor-faktor yang ia dapatkan melalui faktorisasi jika dikalikan akan menghasilkan bentuk aljabar yang dicari faktornya. Subjek menghubungkan proses dan objek yang ia lalui sehingga membentuk pemahaman

yang utuh mengenai konsep faktor aljabar. Pada tahap pemahaman yang utuh inilah dikatakan bahwa subjek telah membentuk skema faktorisasi bentuk aljabar. Skema tersebut lantas dikaitkan dengan skema bangun datar yang ia dapatkan di kelas satu.

### Temuan Lain

Pada saat melakukan pengurangan bentuk aljabar, 4 subjek melakukannya dengan benar, sementara salah seorang subjek menerapkan tanda minus yang berada di depan kurung dengan cara yang tidak tepat. Subjek A tidak menerapkan tanda minus pada seluruh suku yang ada di dalam kurung, namun hanya menerapkannya pada salah satu suku. Menurut Luka (2013:91) kesalahan ini masuk dalam kategori miskonsepsi yang dilakukan oleh siswa sekolah menengah, dan digolongkan dalam kesalahan menggunakan sifat distribusi perkalian terhadap penjumlahan (*invalid or incomplete distribution*) di mana siswa mengalikan suku di depan kurung hanya dengan salah satu yang ada di dalam kurung.

Di samping temuan tersebut, didapati salah seorang subjek (subjek G) yang memiliki alur berpikir berbeda dalam melakukan faktorisasi bentuk aljabar. Alur tersebut adalah (1) subjek mengidentifikasi seluruh faktor dari  $a$  dan  $c$ , (2) subjek mengambil masing-masing satu pasang faktor dari  $a$  (misal  $a_i$  dan  $a_{n-i}$ ) dan  $c$  (misal  $c_i$  dan  $c_{n-i}$ ), (3) Subjek mengalikan  $a_i$  dengan  $c_{m-j}$ , dan mengalikan  $a_{n-i}$  dengan  $c_j$ , (3) hasil perkalian ( $a_i c_{m-j}$  dan  $a_{n-i} c_j$ ) lantas dijumlahkan, dan dicek apakah hasilnya sama dengan  $b$ , (4) Jika  $a_i c_{m-j} + a_{n-i} c_j = b$ , maka proses faktorisasi selesai, dan disimpulkan bahwa faktor yang dicari adalah  $(a_i x + c_{m-j} y)$  dan  $(a_{n-i} x + c_j y)$ , (5) jika  $a_i c_{m-j} + a_{n-i} c_j \neq b$  maka langkah nomor (2) diulang sampai didapatkan faktor dari  $a$  dan  $c$  yang memenuhi.

Cara non-prosedural tersebut secara matematis dijabarkan sebagai berikut. Bentuk  $ax^2 + bx + c$  memiliki maksimal 2 buah akar, sehingga banyak faktor maksimal yang dimiliki ada 2. Misal faktor tersebut adalah  $(px + qy)$  dan  $(rx + sy)$ , sehingga didapat

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= (px + qy)(rx + sy) \\ &= prx^2 + (psxy + qrxy) + qsy^2 \\ &= prx^2 + (ps + qr)xy + qsy^2 \end{aligned}$$

Terlihat bahwa  $ax^2 + bxy + cy^2 = prx^2 + (ps + qr)xy + qsy^2$ . Bisa dianalogikan bahwa  $a = pr$ ,  $b = ps + qr$ , dan  $c = qs$ . Berarti  $p$  dan  $r$  adalah faktor dari

$a$ , sementara  $q$  dan  $s$  adalah faktor dari  $c$ . Jika notasi  $p$  dan  $r$  berturut-turut diganti dengan  $a_1$  dan  $a_2$  (sebagai faktor dari  $a$ ), serta  $q$  dan  $s$  berturut-turut diganti dengan  $c_1$  dan  $c_2$  (sebagai faktor dari  $c$ ) maka didapatkan  $ax^2 + bxy + cy^2 = a_1a_2x^2 + (a_1c_2 + a_2c_1)xy + c_1c_2y^2$ . Sehingga untuk mendapatkan faktor dari  $ax^2 + bxy + cy^2$  cukup dengan mencari  $a_1$  dan  $a_2$  (sebagai faktor dari  $a$ ), serta  $c_1$  dan  $c_2$  (sebagai faktor dari  $c$ ) yang memenuhi  $a_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot c_1 = b$ .

Jika diperhatikan, langkah-langkah yang diambil dengan menggunakan cara ini lebih ringkas jika dibandingkan dengan langkah yang terdapat pada temuan utama. Langkah ini tidak memakai sifat distribusi perkalian terhadap penjumlahan. Cara ini termasuk kategori trik cepat dalam melakukan faktorisasi bentuk aljabar. Cara cepat (trik cepat) disebut oleh Setiawan & Widdiharto (2009:22), serta Rahardjo (2006:34) sebagai “cara non-prosedural”. Subjek G yang memakai cara non-prosedural termasuk kategori siswa berkemampuan tinggi. Usodo (2012:5) menyatakan bahwa banyak siswa pandai dalam memecahkan soal matematika sering menggunakan cara-cara yang cerdas di luar dugaan dan kebiasaan, sehingga memberikan jawaban yang singkat dan akurat. Berdasarkan pernyataan Usodo, cara non-prosedural seperti yang diuraikan di atas dapat muncul dari siswa yang berkemampuan tinggi, sehingga temuan pada subjek G sesuai dengan pernyataan Usodo tersebut.

## SIMPULAN DAN SARAN

Konstruksi pengetahuan matematika siswa kelas VIII SMPN 1 Surakarta terbagi dalam temuan utama dan temuan lain. Konstruksi pengetahuan yang merupakan temuan utama dijabarkan sebagai berikut. (1) Pada tahap aksi, subjek menyebutkan apa yang ia ketahui dari soal dengan menggunakan gambar, ataupun menggunakan kata-kata yang ia tuliskan pada lembar jawab. Subjek pada tahap aksi melakukan operasi pengurangan dengan jalan mengurangkan suku yang memiliki variabel sama. (2) Pada tahap proses, subjek melakukan perkalian bentuk suku dua menggunakan metode FOIL. Terkait dengan penjumlahan trinomial dan perkalian binomial, subjek mengelompokkan suku yang bervariasi sama dengan dua macam cara; secara mental dan mengelompokkan secara tertulis pada lembar jawab. (3) Pada tahap objek, subjek melakukan faktorisasi dengan menggunakan cara prosedural. (4) Pada tahap skema, subjek menjelaskan bahwa faktor-faktor yang ia dapatkan melalui faktorisasi jika dikalikan akan menghasilkan bentuk aljabar yang dicari faktornya. Subjek menghubungkan proses dan objek yang ia lalui

sehingga membentuk pemahaman yang utuh mengenai konsep faktor aljabar. Sementara konstruksi pengetahuan yang merupakan temuan lain sebagai berikut. (1) Terdapat siswa yang melakukan kesalahan yang digolongkan dalam kesalahan menerapkan sifat distribusi perkalian terhadap penjumlahan. (2) Pada tahap objek terdapat siswa yang melakukan faktorisasi dengan cara yang masuk kategori trik cepat yang disebut juga “cara non-prosedural”.

Adapun saran dari hasil penelitian ini dipaparkan sebagai berikut. (1) Guru matematika di tingkat SMP diharapkan dapat mempertimbangkan bagaimana pembentukan konsep yang terjadi dalam diri siswa sebagaimana yang dijelaskan oleh teori APOS, sehingga dapat menyusun pembelajaran faktorisasi bentuk aljabar yang sesuai dengan tahap pembentukan konsep faktor. (2) Hasil penelitian ini perlu digali lebih dalam lagi, oleh sebab itu disarankan para peneliti lanjutan untuk melakukan penelitian pada fokus lain, misalnya pada topik matematika selain faktorisasi bentuk aljabar. (3) Peneliti lanjutan hendaknya dapat menggunakan teori konstruksi pengetahuan selain teori APOS (misalnya teori SOLO) sebagai pisau analisis, sehingga diperoleh karakteristik konstruksi pengetahuan siswa yang lebih variatif. (4) Peneliti lanjutan hendaknya dapat menggunakan tinjauan tertentu untuk menemukan karakteristik konstruksi pengetahuan siswa, misalnya tinjauan gaya kognitif, gaya belajar, atau tinjauan yang lain agar deskripsi konstruksi pengetahuan matematika menjadi lebih lengkap.

## DAFTAR PUSTAKA

- Agustini, P. P. 2007. *Analisis Pemahaman tentang Himpunan Berdasarkan Teori APOS pada Siswa Kelas VII SMP Negeri I Karangrejo Tulungagung*. Skripsi UMM Malang.
- Arends, R.I. 2008. *Learning to Teach: Belajar untuk Mengajar*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Asiala, M., Brown, A., DeFries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. 1996. "A Framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education". *Research in Collegiate Mathematics Education* 2(3), *CBMS Issues in Mathematics Education*, pp. 1-23.
- Asiala, M., Mathews, D., Morics, S., & Oktac, A., & Dubinsky, E., 1997. "Development of students understanding of cosets, normality and quotient groups", *Journal of Mathematical Behavior* 16 no. 4 pp. 241-309.
- Boole, M.E. 2004. *Philosophy & fun of algebra*. London: C.W. Daniel, ltd.
- Brown, A., DeFries, D.J., Dubinsky, E., & Tomas, K. 1997. "Learning binary operations, groups, and subgroups". *Journal of Mathematical Behavior* vol. 16 no. 3 pp. 187-239.

- BSNP. 2006. *Standar Isi untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah: Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar SMP/MTs*. Jakarta: Badan Standar Nasional Pendidikan.
- Dubinsky, E. & McDonald, M.A. 2001. "APOS: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research" in Holton, D. (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: an ICMI Study*. pp. 273-280. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hergenhahn, B.R. & Olson, M.H., 2009. *Theories of Learning*. Edisi Ketujuh. Terj. Wibowo, T.S., Jakarta: Kencana.
- Luka, M.T., 2013, *Misconceptions and Errors in Algebra at Grade 11 Level: The Case of Two Selected Secondary Schools In Petauke District*, A Dissertation Submitted to The University of Zambia, Lusaka: The University of Zambia.
- Maryono, 2008, *Eksplorasi Pemahaman Mahasiswa Mengenai Konsep Keterbagian Bilangan Bulat*. Thesis. Malang: Universitas Malang.
- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P. & Arora, A. *TIMSS: 2011 International Results in Mathematics*, USA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Mulyono, 2010, "Penelusuran Pemahaman Mahasiswa dalam Mengkonstruksi Sebuah Konsep Matematika" dalam *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNS 2010*. pp. 126-133.
- Permendiknas no. 23 tahun 2006, bagian lampiran mengenai Standar Kompetensi Lulusan (SKL).
- Rahardjo, M., 2006. "Solusi masalah pemfaktoran bentuk kuadrat", dalam *Buletin Limas*, no. 17, Desember 2006. pp. 30-34. Yogyakarta: P3G Matematika.
- Setiawan & Widdiharto, R., 2009, *Kapita Selekta Pembelajaran Aljabar Kelas VIII SMP*, Yogyakarta: P4TK Matematika.
- Shadiq, F., & Widayiswara. 2004. *Pemecahan Masalah, Penalaran, dan Komunikasi*. Bahan Diklat Instruktur Matematika SMA. Yogyakarta: P3G Matematika
- Suparno, P. 1997. *Filsafat Konstruktivisme dalam Pendidikan*. Yogyakarta: Kanisius.
- Suparno, P. 2001. *Teori Perkembangan Kognitif Jean Piaget*. Yogyakarta: Kanisius.
- Suryadi, D. 2010. *Menciptakan Proses Belajar Aktif: Kajian dari Sudut Pandang Teori Belajar dan Teori Didaktik*. Makalah disajikan pada Seminar Nasional Pendidikan Matematika di UNP, 9 Oktober 2010.
- Tziritas, M. 2011. *APOS Theory as a Framework to Study the Conceptual Stages of Related Rates Problems*. A Thesis in the Department of Mathematics and Statistics. Canada: Concordia University Montreal.
- Usodo, B. 2012. "Karakteristik Intuisi Siswa SMA dalam Memecahkan Masalah Matematika Ditinjau dari Kemampuan Matematika dan Perbedaan Gender". *Aksioma* vol. 01 no. 01 Maret 2012. pp. 1-14.